L’allocation dynamique d’actifs : séparation statique et dynamique

Isabelle BAJEUX-BESNAINOU* et Roland PORTAIT**

* The George Washington University, bajeux@gwu.edu

** CNAM et ESSEC, rolcot@wanadoo.fr

Nous remercions Marie Pascale Leonardi pour une traduction compétente de cet article écrit initialement en Anglais et INQUIRE pour le financement d’une recherche dont cet article fait partie.

Introduction

Les résultats de séparation permettent d'affirmer que tous les investisseurs optimisent leurs portefeuilles en combinant un nombre limité de fonds communs de placement et que ces fonds de séparation sont les mêmes pour tous les investisseurs partageant quelques caractéristiques communes (telles que l'horizon d'investissement). Ces résultats de séparation, établis dès les années cinquante dans un cadre moyenne-variance par Tobin et Black, puis généralisés par Cass et Stiglitz (1970) au cas de préférences plus générales et par Merton (1971, 1973) dans le contexte de la gestion dynamique, ont une portée considérable tant en matière de gestion déléguée qu'en ce qui concerne l'équilibre du marché. Ils signifient que les individus qui ont la possibilité d'acquérir un très grand nombre d'actifs (plusieurs centaines) peuvent en fait se cantonner à un nombre limité de fonds (éventuellement à un seul fond efficient d'actifs risqués qui s'ajoute à l'actif sans risque); Ces résultats impliquent aussi que le risque induit par n'importe quel actif individuel est lié à sa covariance avec les rentabilités des fonds de séparation (bêtas) et que de ce fait la prime de risque qui lui est appliquée est une somme pondérée de ces différents bêtas. Ces résultats prévalent, sous des formulations différentes, dans un cadre statique (Markowitz, CAPM, ..) ainsi que dans un contexte dynamique (Merton). Cependant les nouvelles approches d'optimisation de portefeuilles avec réallocation d'actifs en temps continu permettent de transformer le problème dynamique en un problème statique. Dès lors, à condition d'être correctement réinterprétés, les résultats de séparation valables dans un cadre statique sont également pertinents dans un cadre dynamique. Leur relation avec les résultats de séparation dynamique de Merton méritent donc d'être élucidés et ceci constitue le principal but de cet article.

Nous étudions les différentes versions des théorèmes de séparation en utilisant le portefeuille numéraire comme outil. Le cadre d'analyse ainsi que les définitions utiles sont présentés en partie 2. La partie 3 est consacrée aux différents théorèmes de séparation en approche statique, c'est à dire lorsque, sur la période d'investissement, aucune réallocation n'est effectuée entre les différents fonds de séparation. Dans la partie 4, nous étudions la séparation en approche dynamique, lorsque l'investisseur est supposé réallouer son portefeuille de façon dynamique tout le long de la période d'investissement. Là encore, le portefeuille numéraire s'avère être un outil très utile pour étudier ces théorèmes de séparation, même dans le cadre d'un modèle général multi-facteurs.

1 Actifs financiers, portefeuilles, numéraires et séparation

1.1 Cadre général

Nous considérerons occasionnellement un cadre statique dans lequel les portefeuilles sont constitués à l'instant 0 par combinaison de $N+1$ actifs notés $(0,1,\ldots, N)$ (0 désigne l'actif sans risque) et maintenus dans le portefeuille, sans transactions jusqu'à l'horizon T. Cependant, l'essentiel de l'article est consacré au problème d'allocation d'actifs avec révisions opérées en temps continu pour l'analyse duquel nous nous appuyons sur les hypothèses, notations et définitions suivantes:

- $N+1$ actifs notés $(0,1,\ldots, N)$ font l'objet de transactions dans un marché sans frictions, ouvert en continu, sans opportunité d'arbitrage, mais non nécessairement complet.
- La probabilité et la structure d'information sont représentées par l'espace $\left(\Omega,\{F_t\},P\right)$ satisfaisant aux conditions habituelles.
- Les prix $(S_0,\ldots S_N)$ des actifs traités sont des semi-martingales et satisfont aux conditions d'intégrabilité. On note dR_i leurs rendements instantanés: $dR_i=dS_i/S_i$ avec $i=0,1,\ldots,N$ et $d\underline{R}=(dR_1,\ldots,dR_N)$.

Dans certains cas, nous supposerons que les prix suivent des processus de Itô, dans d'autres cas, qu'ils suivent des processus de diffusion à variables d'état (cf. plus loin)

- Les stratégies de portefeuille autofinançantes sont caractérisées par le vecteur de poids $\underline{x}(t)$ des actifs 1 à N détenus en t, entre les instants 0 et T. Une stratégie spécifique est donc notée $\underline{x}(t)$ ou plus simplement $\underline{x}$; Le poids sur l'actif 0 est obtenu par complément à 1 $(x_0=1-\underline{x}'\underline{1})$. On notera $X(t)$ la valeur correspondante du portefeuille à l'instants t. On suppose, sans perte de généralité, que $X(0)=1$.

  $\underline{x}$ est une stratégie de portefeuille autofinançante admissible tant qu'elle est autofinançante, prévisible et le processus de valeur correspondant, $X(t)$, satisfait les conditions adéquates d'intégrabilité garantissant ainsi un moment fini d'ordre 2.

1.2 Le portefeuille de croissance optimale : définitions et propriétés

Un numéraire *N(t)* est un processus stochastique F_t-adapté, presque sûrement positif, qui peut être interprété comme le processus de valeur d'une stratégie admissible $\underline{n}$ dans A: l'ensemble des numéraires admissibles coïncide donc avec les stratégies dans A dont les processus de prix sont strictement positifs.

Parmi les numéraires admissibles, il en existe un qu'il convient de mettre en évidence: le numéraire qui, pour tout portefeuille (ou actif) autofinançant dans A, génère des prix qui sont martingales dans la probabilité historique.

L'existence et l'unicité de ce « portefeuille numéraire », ainsi que certaines de ses caractéristiques sont rappelées ci-dessous ; toutes ces propriétés étant démontrées dans Bajeux-Besnainou et Portait (1997):

- Il existe un numéraire admissible, appelé « portefeuille numéraire », « portefeuille de croissance optimale » ou encore « portefeuille Log-optimal », dont la valeur est notée *H(t) (H(0)=1)*, tel que le processus de valeur de n'importe quelle stratégie $\underline{x}$ dans A (libellée en numéraire H) est une martingale sous la « probabilité historique » *P* (ce qui signifie que $\forall \underline{x} \in A, \dfrac{X(t)}{H(t)}$ est une *P*-martingale).
- $\{H(t)\}_{t\in(0,T)}$ est le processus de prix de la stratégie de portefeuille autofinançante $\underline{h}$ qui maximise le logarithme espéré de la richesse terminale (Max E(Log(*X(T)*) où *X(T)* est la richesse terminale).
- L'existence, l'unicité et la caractérisation de *h* prévalent même en marché incomplet.

Pour obtenir une caractérisation plus explicite de $\underline{h}$, nous avons besoin de l'hypothèse selon laquelle les prix des actifs suivent des processus d'Itô. Plus précisément, selon cette hypothèse, les prix des *N* actifs risqués sont régis par les équations différentielles stochastiques suivantes:

(1) $dS_i/S_i = \mu_i(.)dt + \underline{\Sigma_i}(.)d\underline{z} \quad i = 1, \ldots, N$

qui peut aussi s'écrire sous forme matricielle:

(1) $d\underline{R} = \underline{\mu}\,(.)dt + \Sigma(.)d\underline{z}$

où $\underline{z}$ est un mouvement brownien *M*-dimensionel standard, $d\underline{R}$ est le vecteur *N*-dimensionnel des rendements, $\underline{\mu}(.)$ est un processus adapté *N*-dimensionnel et $\Sigma(.)$ un processus matriciel *NxM*-adapté de plein rang (presque sûrement) satisfaisant les conditions d'Itô ; $\omega \in \Omega$ et (t,ω) est noté *(.)*.

Nous supposons également l'existence d'un actif localement sans risque. Par convention il s'agit de l'actif *0* et son prix suit l'équation suivante :

$dS_0/S_0=r(.)dt.$

De plus, le taux sans risqué instantané, *r(.)*, obéit à l'équation suivante:

$dr = \alpha(.)dt + \underline{\xi}'d\underline{z}$ où $\alpha(.)$ et $\underline{\xi}(.)$ satisfont les conditions d'Itô (le prime est utilisé pour la transposée).

(F_t) est la filtration générée par $\underline{z}(t)$ et nous distinguons par la suite le cas des marchés complets ($N \geq M$) de celui des marchés incomplets ($N<M$). Lorsque $N>M$, il y a plus d'actifs instantanés risqués que de mouvements browniens, ce qui implique la redondance de certains actifs. Nous ne considérerons alors que les M actifs non redondants, de sorte que Σ soit une matrice MxM inversible.

Nous présentons ci-après les différentes expressions possibles du vecteur de poids $\underline{h}$ du portefeuille numéraire:

Le portefeuille numéraire est donné par:

(2) $\underline{h}(t) = V^{-1}(.)\,(\underline{\mu}(.)-\underline{r}(.))$

avec $\underline{r} = r\underline{1}$ où $\underline{1}$ est le vecteur unitaire et $V=\Sigma\Sigma'$ est la matrice de variance-covariance des N rendements risqués.

Le portefeuille numéraire $\underline{h}(t)$ est donc une combinaison de l'actif instantané sans risque *0* et du portefeuille tangent instantané avec pour proportions respectives $1-\underline{h}'(t)\underline{1}$ et $\underline{h}'(t)\underline{1}$. Plus précisément, $\underline{h}(t)$ est donné en fonction du portefeuille tangent instantané $m(t)$ par:

(3) $\underline{h}(t)=k_t\,\underline{m}(t)$ où $k_t=\underline{1}'\underline{h}(t)=\dfrac{\mu_m(.)-r(.)}{\sigma_m^2(.)}$

(μm *(.)* et $\sigma_m^2(.)$ désignent l'espérance et la variance instantanés de M).

Dans le cas de marchés complets Σ est inversible et on définit $\underline{\lambda}$ par:

(4) $\underline{\lambda}(.)=\Sigma^{-1}(.)\,(\underline{\mu}(.)-\underline{r}(.))$

où $\underline{\lambda}(.)$ peut être interprété comme le vecteur des prix de marché des risques associés au vecteur de mouvements browniens $\underline{z}$.

L'équation (2) peut alors s'écrire:

(5) $\underline{h}(t) = (\Sigma'(.))^{-1}\,\underline{\lambda}(.)$

Ainsi :

$$(6)\qquad H(t) = e^{\left[\int_0^t \left(r(.)+.5\left\|\underline{\lambda}(.)\right\|^2\right)dt + \int_0^t \underline{\lambda}'(.)d\,\underline{z}\right]}$$

$$\Leftrightarrow \quad dH/H = (r(.)+\left|\left|\underline{\lambda}\right|\right|^2)dt + \underline{\lambda}'d\underline{z}$$

où $\left|\left|\underline{\lambda}\right|\right|$ est la norme euclidienne du vecteur de prix du risque $\underline{\lambda}$.

Notons que lorsque le marché est incomplet ($N<M$), l'équation (5) s'écrit:

$$(5')\qquad \underline{h}(t) = (\Sigma\Sigma')^{-1}\,(\underline{\mu}(.) - \underline{r}(.))$$

Nous rappelons que s'il existe des actifs redondants, ceux-ci ne sont pas inclus dans la liste des N actifs risqués, de sorte que Σ est toujours de rang plein et que $\Sigma\Sigma' = V$ est une matrice NxN non-singulière.

2.3 Les principes de séparation

Rappelons qu'il y a séparation en K fonds lorsque tous les investisseurs ayant quelques caractéristiques communes (telles que des anticipations identiques, des horizons communs et/ou des traits communs dans leurs fonctions d'utilité) optimisent leurs portefeuilles en combinant ***les mêmes K fonds*** (K<N) appelés fonds séparateurs ou fonds de séparation. Nous distinguons les différents cas ci-dessous:

- La séparation statique dans laquelle la combinaison initiale (optimale en $t=0$) des K fonds séparateurs ne fait pas l'objet de transactions ultérieures. C'est nécessairement le cas lorsque les stratégies de portefeuille ne peuvent pas, par hypothèse, faire l'objet de révision (stratégie « buy and hold », comme par exemple dans le modèle standard de Markowitz). Nous verrons cependant que *la séparation statique en K fonds (eux mêmes dynamiquement gérés) peut prévaloir même lorsque les réallocations d'actifs sont autorisées tout le long de l'intervalle (0 T),* où T désigne l'horizon d'investissement.
- La séparation dynamique prévaut lorsque l'optimisation requiert, entre 0 et T, des réallocations entre les K fonds séparateurs (comme dans le modèle de Merton).

Une application adéquate de ces concepts peut expliquer différents puzzles concernant l'allocation d'actifs (voir Bajeux-Jordan-Portait 2001-a et b).

Nous allons dans ce qui suit étudier successivement la séparation statique puis dynamique.

3 Séparation statique

3.1 La séparation statique (deux fonds) de Tobin et Black dans un cadre de moyenne-variance

Ceci est le théorème de séparation le plus connu et habituellement enseigné dans les cours de base en finance. Il s'applique lorsque tous les investisseurs sont présumés: (i) utiliser un critère de moyenne-variance dans leur sélection de portefeuille (ou si les rendements des actifs sont supposés normaux); (ii) avoir un horizon d'investissement identique, en général une année; (iii) mettre en oeuvre des stratégies statiques de portefeuille sans possibilité de révision d'aucune sorte (ou *buy and hold*); (iv) avoir des anticipations homogènes (mêmes estimations quant aux espérances, variances et corrélations des rendements).
Dans le cas où un actif sans risque est disponible cette séparation en deux fonds peut se déduire de la forme de la frontière d'efficience, unique pour tous les investisseurs. Cette frontière efficiente joint les points représentatifs de l'actif sans risque et du portefeuille tangent. Tous les investisseurs qui suivent le critère moyenne-variance choisiront des combinaisons de l'actif sans risque et du portefeuille tangent qui sera le seul portefeuille risqué détenu à l'optimum. La combinaison optimale actif sans risque-actif risqué dépend évidemment des caractéristiques des investisseurs, en particulier de leur aversion au risque.

Dans le cas où un actif sans risque n'est pas disponible la séparation en deux fonds prévaut aussi: Deux portefeuilles efficients quelconques engendrent tous les portefeuilles efficients (théorème de Black).

3.2 La généralisation de Cass-Stiglitz du théorème de séparation statique en deux fonds

Cass et Stiglitz (1970) ont généralisé le théorème de séparation de Black-Tobin et caractérisé les conditions requises pour obtenir un théorème de séparation en deux fonds. En marchés complets, la séparation en deux fonds est valide pour une large classe de fonctions, fonctions HARA[1] incluses. En marchés incomplets avec un actifs sans

[1] HARA signifie « hyperbolic absolute risk aversion ». l'expression analytique d'une HARA est donnée quelques lignes plus loin ; Les utilités quadratiques, CRRA (constant relative risk aversion) et CARA (constant absolute risk aversion) sont des cas particuliers de HARA.

risque, la séparation en deux fonds ne vaut que pour les fonctions HARA (sans actif sans risque, elle ne vaut que pour les préférences quadratiques et CRRA). Plus précisément, une fonction d'utilité *U(X)* est une fonction d'utilité HARA si elle s'écrit : $U(X) = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{X-X_c}{\gamma}\right)^{1-\gamma}$ avec quelques restrictions[2] sur les coefficients et domaines de définition. Cass et Stiglitz (1970) ont alors montré que tous les investisseurs HARA *partageant le même paramètre* γ (mais différant par leurs richesses initiales et par le paramètre X_c) peuvent choisir leur portefeuille de façon optimale en combinant les deux mêmes fonds[3]. L'actif sans risque, quand il existe, peut être choisi comme l'un des deux fonds. Etant donné que tous les investisseurs quadratiques (moyenne-variance) sont des investisseurs HARA partageant le même paramètre γ (en faisant tendre γ vers *1*), les théorèmes de séparation en deux fonds de Tobin et Black sont des cas particuliers de la séparation de Cass et Stiglitz. Le Tableau 1 ci-dessous présente de manière plus détaillée les conditions de validité de ce théorème de séparation en deux fonds est donnée dans:

Tableau 1 *Conditions de satisfaction du théorème de séparation en deux fonds*

	Marché complets	Marché incomplets
Existence d'un actif sans risque	Classe plus large que les functions HARA	Fonctions HARA
Pas d'actif sans risque	Pas pertinent car en marché complet, l'actif sans risque existe	Quadratiques ($\gamma=1$) ou CRRA (Constant Relative Risk Aversion, obtenue pour $\theta=0$)

3.3 La pertinence des résultats de séparation statique quand des ré-allocations sont autorisées

[2] Voir Allaz et Dumas (1996) par exemple pour plus de détails sur ces restrictions.
[3] Voir Ingersoll(1987) pour une présentation approfondie des résultats Cass et Stiglitz.

Il est important de noter que, même si la séparation en deux fonds de Black ou de Cass et Stiglitz est habituellement appliquée dans un cadre statique sans considérer des possibilités de réallocation, ***elle est également valide pour l'analyse de stratégies dynamiques*** lorsque des ré-allocations temporelles sont autorisées, en particulier quand les marchés sont complets[4]. Par exemple, avec une réallocation continue, chaque stratégie autofinançante admissible peut être considérée comme un actif contingent. Ces actifs contingents, en nombre infini, peuvent être traités comme des actifs dans un cadre statique. Les résultats de la séparation de Cass et Stiglitz peuvent alors être appliqués dans ce cadre statique d'actifs en nombre infini.

Plus précisément, considérons un problème dynamique *(P)* d'optimisation de portefeuille, en temps continu entre *0* et *T*, les variables de contrôle étant les poids $\underline{x}$ des portefeuilles. En l'absence de consommation, les stratégies sont autofinançantes et le programme d'optimisation s'écrit :

$$(P) \quad \underset{\underline{x \in A}}{Max}\, E\big(U[X(T)]\big) \quad ; \quad X(0)=X_0$$

où X_0 est la mise de fonds initiale et *X(T)* est la richesse terminale.

Pliska (1986), Cox et Huang (1989) et Karatzas, Lehoczky et Shreve (1987) ont montré que, lorsque les marchés sont complets, *(P)* est équivalent à une optimisation en deux étapes :

<u>Etape 1</u> : résoudre $(P') \quad \underset{X(T)\in L^2}{Max}\, E\big(U[X(T)]\big)\, s.t.\, E\left(\frac{X(T)}{H(T)}\right)=X_0$

On note L^2 l'ensemble des variables F_T-mesurables ayant un moment fini d'ordre 2. *(P')* génère la richesse terminale *X*(T)* mais ne détermine pas la stratégie (poids des actifs) qui permet de l'atteindre.

Les conditions de premier ordre de *(P')* s'écrivent:

$U'(X^*(T)) = \lambda/H(T)$ (λ est le multiplicateur de Lagrange)

Les conditions de premier ordre permettent d'obtenir facilement la richesse terminale optimale *X*(T)* lorsque la fonction d'utilité *U* est spécifiée. Dans ce qui suit, nous obtiendrons les richesses terminales optimales pour des investisseurs quadratiques et plus généralement, pour des investisseurs HARA.

<u>Etape 2</u> : Trouver la stratégie admissible $\underline{x}^*(t)$ qui produit la richesse optimale *X*(T)* (solution de *(P')*).

[4] L'hypothèse de marchés complets est bien moins restrictives lorsque l'on considère des stratégies dynamiques que lorsque l'on se restreint à des stratégies statiques.

De l'équivalence entre *(P)* et *(P')*, il est clair que l'optimisation dynamique *(P)* (mettant en jeu une réallocation d'un nombre fini *N+1* d'actifs en temps continu) est équivalente au problème statique *(P')* impliquant un nombre infini d'actifs contingents *X(T)* à partir desquels doit être effectué un choix (statique).

Dans la sous-partie suivante, nous allons, dans un grand nombre de cas, caractériser les fonds de séparation dynamiques grâce auxquels, lorsque la réallocation continue est autorisée, une séparation *statique* engendre des portefeuilles optimaux.

3.4 Les fonds séparateurs quand la séparation est statique et la stratégie dynamique

3.4.1 Le cas des utilités moyenne-variance

Dans Bajeux-Besnainou et Portait (1998), le théorème de séparation a été appliqué au cas d'un investisseur à utilité moyenne-variance qui est supposé réallouer son portefeuille de façon optimale, en continu. En fait, son programme d'optimisation dynamique consiste à maximiser l'espérance de l'utilité (quadratique) de sa richesse terminale sous une contrainte budgétaire et en faisant l'hypothèse que l'investisseur met en œuvre des stratégies de portefeuille autofinançantes, avec réallocation en temps continu.

Dans ce cas, on peut déduire une frontière efficiente dynamique (FED) dans l'espace écart type-rentabilité espérée $\left(\sigma\left(W(T)\right), E\left(W(T)\right)\right)$. FED provient du programme *(P')* résolu pour une utilité quadratique:

$$(P') \quad \underset{X(T)\in L^2}{Max} E\left[X(T) - \frac{1}{2q}X(T)^2\right] \; s.t. E\left(\frac{X(T)}{H(T)}\right) = X_0$$

(les tolérances au risque sont exprimées par différentes valeurs de q).

Les solutions $\underline{x}(t)$ de ce programme sont appelées des stratégies DMVE (stratégies Dynamiques Moyenne-Variance Efficientes). Les richesses terminales qu'elles engendrent sous la contrainte *X(0)=1* sont les rentabilités DMVE. **Ces rentabilités DMVE engendrent toute la frontière FED (Frontière Efficiente Dynamique) dans l'espace $\left(\sigma\left(X(T)\right), E\left(X(T)\right)\right)$.**

Les principales caractéristiques de FED et des rentabilités DMVE sont décrites dans Bajeux-Besnainou et Portait (1998) et sont rappelées ci-après:

- En marché complet ou incomplet, dans l'espace (σ, E), FED est une ligne droite contenant les points représentant les obligations zéro-coupons ($\sigma = 0, E = 1/B_T(0)$) (voir graphique 1).

FED est générée par la combinaison statique de deux fonds : l'obligation zéro-coupon et une stratégie DMVE (qui peut être choisie de façon arbitraire). Ce résultat peut être considéré comme une extension du résultat standard de Markowitz quand un nombre infini d'actifs peut être traité : chaque stratégie x dans A peut être considérée comme un actif synthétique pouvant se traiter dans un cadre statique uni-période.

- En marché complet, les conditions de premier ordre de *(P')* génèrent les rentabilités DMVE notées $X^*(T)$ satisfaisant:

(7) $X^*(T) = q - \lambda/H(T)$

Avec λ comme multiplicateur de Lagrange de la contrainte de richesse[5].

On déduit directement de l'équation (7), la séparation en deux fonds: toute stratégie DMVE est une combinaison statique d'une position longue de q zéro-coupons et d'une position courte de λ unités du portefeuille générant 1/H(T) en T.

L'équation de FED (dans l'espace (σ,E)) est:
$E(X(T))=(1/B_T(0))+a\sigma(X(T))$, pour toute rentabilité DMVE $X(T)$ avec $a=\sigma(1/H(T))/B_T(0)$ ($\sigma(1/H(T))$ étant l'écart-type $1/H(T)$).

Le dernier résultat (avec une caractérisation explicite de la Frontière Efficiente Dynamique) repose sur la complétude du marché. Il est utile de noter que l'hypothèse de complétude du marché est raisonnable dans le cadre que nous avons défini où l'on suppose des transactions en continu et où la filtration est générée par la diffusion des rendements. En effet, avec des stratégies autofinançantes, $N+2$ actifs traités non-redondants génèrent une infinité d'actifs synthétiques qui permettent d'atteindre n'importe quelle richesse terminale stochastique dans L^2.

Les Frontières Efficientes Dynamiques et Statiques (FED et FES) peuvent être représentées et comparées dans l'espace (σ, E). Il apparait alors que FED est préférable a FES, car pour la même variance, les stratégies DMVE produisent de plus fortes espérances de rendement que les stratégies statiques.

[5] La minimisation du Lagrangien de (P') : Max $EX(T) - (1/2q)EX(T)^2 - \lambda X(T)/H(T)$ conduit à (7). La contrainte permet de calculer λ.

3.4.2 Le cas plus général des utilités HARA

Le résultat précédent de séparation statique, valide pour des investisseurs à utilités quadratiques, peut être étendu aux fonctions d'utilités HARA[6]. La version dynamique de la séparation de Cass et Stiglitz décrite précédemment est alors obtenue. En effet, il est possible de montrer (voir Bajeux-Jordan-Portait, 2001-b) que le programme d'optimisation HARA:

$$(P') \quad \underset{X(T)\in L^2}{Max} E\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{X(T)-X_c}{\gamma}\right)^{1-\gamma}\right] s.t. E\left(\frac{X(T)}{H(T)}\right)=X_0$$

possède une solution générale qui s'écrit:

$$(8) \qquad X^*(T) = kH(T)^{1/\gamma} + X_c$$

où k est une constante qui peut être calculée à l'aide de la contrainte de budgétaire.

L'équation (8) implique que la stratégie optimale pour un investisseur à utilité HARA est une combinaison statique (*buy and hold)* d'une obligation zéro-coupon (qui délivre X_c en T) et d'un fonds dynamique qui « atteint » la valeur terminale $H(T)^{1/\gamma}$ en T. Ainsi tous les investisseurs à utilité HARA partageant le même paramètre γ optimisent leur portefeuille en combinant les deux mêmes fonds. **Ceci est le résultat de séparation de Cass-Stiglitz, réinterprété dans un contexte de réallocation continue comme à la fin de la sous-partie 3.2**. Dans le cas particulier où $\gamma=-1$ (utilité quadratique), on obtient les résultats du cas moyenne-variance présentés en 3.3.1.

4 Les principes de séparation dynamique

Rappelons les résultats de la séparation dynamique en temps continu obtenus par Merton (1971-1973). Dans le cas de la séparation dynamique une réallocation entre les différents fonds séparateurs est opérée entre *0* et *T*. Nous commencerons par le cas simple d'un « ensemble d'opportunités d'investissement » constant (les prix des actifs suivant des mouvement browniens géométriques et les taux d'intérêt étant constants). Ensuite, nous aborderons le cas général du modèle à *L* variables d'état.

---

[6] Les utilités HARA (hyperbolic absolute risk aversion) constituent une classe vaste de fonctions d'utilité dont relèvent les utilités quadratiques, à aversion absolue constante, à aversion relative constante, …

4.1 La séparation dynamique de Merton sous l'hypothèse de mouvements browniens géométriques et de taux constants

Lorsque tous les prix des actifs traités suivent des mouvements browniens géométriques et qu'il existe un actif sans risque avec un rendement constant, la séparation en deux fonds reste vraie en temps continu. Plus précisément, tout investisseur va optimiser son portefeuille par une réallocation dynamique entre deux fonds seulement (l'actif sans risque instantané et le portefeuille Log-optimal $\underline{h}$).

Il peut être utile de souligner les différences entre la séparation *statique* en deux fonds obtenue en 3.3 - 3.4 et les résultats de séparation dynamique de Merton.

Premièrement, Merton obtient une séparation en deux fonds pour des processus stochastiques très spécifiques (taux d'intérêt constants et mouvements browniens géométriques). Contrairement au cas de Merton, la séparation en deux fonds est obtenue dans notre cadre avec des processus de prix très généraux (semi-martingales). Nous considèrerons par la suite, le modèle de Merton plus général avec L variables d'état conduisant à une séparation en L+2 fonds.

Deuxièmement, même lorsque la séparation en deux fonds reste valide dans le modèle de Merton, les stratégies optimales sont mises en place par une gestion *dynamique* de deux fonds (l'actif sans risque instantané (actif *0*) et le portefeuille Log-optimal $\underline{h}$). Contrairement au cas de Merton, les stratégies optimales décrites dans 3.2 – 3.3 sont des combinaisons *statiques* de l'obligation zéro-coupon de maturité T (actif $N+1$) et d'un portefeuille valide pour n'importe quel investisseur avec un horizon d'investissement T (bien entendu ce dernier fond est lui même géré dynamiquement).

Troisièmement, la séparation de Merton prévaut en marchés incomplets et pour tous les horizons d'investissement tandis que dans la séparation statique (3.2 – 3.3) les marchés sont présumés dynamiquement complets et la séparation ne vaut que pour des investisseurs dont l'horizon T est commun. Les résultats de séparation statique sont donc plus « généraux et plus forts » que leurs homologues dynamiques du premier et deuxième point de vue mais moins généraux du troisième point de vue.

4.2 Le modèle dynamique à L variables d'état et la séparation en L+2 fonds de Merton

Nous revenons ici à un cadre d'hypothèses plus général en supposant maintenant que L variables d'état affectent la dynamique des rendements. Nous supposons que ces variables d'état sont représentées par un vecteur stochastique $\underline{Y}(t)$ obéissant à : $d\underline{Y}(t) = \mu_Y(.)dt + \Omega\, d\underline{z}(t)$ où Ω est une matrice LxM. Remarquons que les marchés ne sont pas forcément complets ici du fait que le nombre M de mouvements browniens peut être supérieur au nombre N d'actifs risqués.

Compte tenu des propriétés du portefeuille numéraire, nous savons que si $X^{**}(T)$ représente la richesse terminale optimale d'un investisseur (et $\underline{x}^{**}(t)$ la stratégie de portefeuille correspondante qui existe nécessairement, même en marchés incomplets), la valeur de la richesse optimale à une date intermédiaire t s'écrit:

(9) $X^{**}(t) = H(t)\ E\left(\frac{X^{**}(T)}{H(T)} / \underline{Y}(t)\right) = \psi(t, H(t), \underline{Y}(t))$ ce qui implique d'après le Lemme d'Itô:

$$\frac{dX^{**}(t)}{X^{**}(t)} = [.]dt + \frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial H}\underline{\lambda}'\, d\,\underline{z} + \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \underline{Y}}\right)' \Omega d\,\underline{z}$$

Par la définition de la stratégie autofinançante, cette dynamique peut aussi s'écrire:

$$\frac{dX^{**}(t)}{X^{**}(t)} = [.]dt + \underline{x}^{**} \Sigma\, d\,\underline{z}$$

Par identification, on obtient:

$$\Sigma'\,\underline{x}^{**} = \frac{1}{\psi}\Omega'\left(\frac{\partial \psi}{\partial \underline{Y}}\right) + \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial H}\right)\underline{\lambda}$$

ce qui implique:

$$\Sigma\Sigma'\,\underline{x}^{**} = \frac{1}{\psi}\Sigma\Omega'\left(\frac{\partial \psi}{\partial \underline{Y}}\right) + \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial H}\right)\Sigma\underline{\lambda}$$

et vu que $\Sigma\Sigma'$ est une matrice NxN non singulière, la stratégie optimale $\underline{x}^{**}$ satisfait:

(10) $$\underline{x}^{**} = \frac{1}{\psi}(\Sigma\Sigma')^{-1}\,\Sigma\Omega'\left(\frac{\partial \psi}{\partial \underline{Y}}\right) + \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial H}\right)(\Sigma\Sigma')^{-1}\,\Sigma\underline{\lambda}$$

Une interprétation directe de cette formule conduit à un théorème de séparation en *L+2* fonds: un de ces fonds est le portefeuille numéraire obtenu par l'équation (5). La richesse investie dans le portefeuille numéraire est proportionnelle à $\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial H}\right)$[7]. La richesse investie dans les *L* autres fonds est alors proportionnelle à $\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial Y_l}\right)$ pour chaque variable d'état Y_l. Chacun de ces L fonds est donc parfaitement localement corrélé avec une variable d'état et peut être interprété (cf. Merton) comme un portefeuille destiné à couvrir l'investisseur contre des mouvements défavorables de cette variable d'état. Le dernier fonds est l'actif sans risque car $\underline{x}^{**}$ représente les proportions investies dans les actifs risqués dont la somme est généralement différente de *1*, la proportion d'investissement de l'actif sans risque est alors $1-\underline{1}'\,\underline{x}^{**}$. Ce résultat a été obtenu pour la première fois par Merton (par une approche différente qui consiste à résoudre un problème de contrôle optimal stochastique) et reste valide en marché incomplet.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons analysé différents résultats de séparation de fonds. Il est particulièrement intéressant de relier les formes statiques et dynamiques de séparation entre elles. En particulier, la séparation statique n'implique **pas** nécessairement que seules des stratégies de portefeuille statiques ou *buy and hold* sont mises en oeuvre. En effet, la séparation statique concerne des fonds obtenus en général par une réallocation dynamique continue des *N+1* actifs de base.

[7] Qui s'interprète comme une aversion relative au risque à l'aide d'un résultat de Merton.

Références bibliographiques

- Bajeux-Besnainou I. et R. Portait, 1997, "The Numeraire Portfolio: a new Methodology for Financial Theory". *The European Journal of Finance*, December.
- Bajeux-Besnainou I. et R. Portait, 1998, "Dynamic Asset Allocation in a Mean-Variance Framework", *Management Science*
- Bajeux-Besnainou I., Jordan J. et R. Portait, 2001-a, "An asset allocation puzzle: comment", *American Economic Review*, September
- Bajeux-Besnainou I., Jordan J. et R. Portait, 2001-b, "Dynamic Asset Allocation for stocks, bonds and cash", *forthcoming in the Journal of Business*
- Cass, D. et J.E. Stiglitz. "The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds." *Journal of Economic Theory*, 2, 1970, pp. 122-160.
- Dumas B. et B. Allaz, 1996, *Financial Securities*, London: Chapman and Hall.
- Ingersoll, J., 1987, "*Theory of Financial Decision Making*". Totowa, N.J. : Rowman and Littlefield,
- Markowitz H., 1959, *Portfolio selection*, New Haven: Yale University Press.
- Merton R., 1971, Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model, *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413.
- Merton R., 1973, An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica*, 41.

Table des Matières